$Z \sim G\left(a=\frac{1}{2}=\frac{v}{2}, \beta=2\right) \equiv \chi_1^{\,2}$

$$G(a,\beta) = \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/\beta}, \quad x>0$$

Μάθημα 6ο — 18/11/15

Αλλαγή Μεταβλητής

Αν η τ.μ. $X \sim p_X(x)$, $f_X(x)$ ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιά η κατανομή της $Y=h(X)$;

(i) Η μέθοδος της α.σ.κ.
(ii) Η μέθοδος του μετασχηματισμού.
(iii) Η μέθοδος της ροπογεννήτριας.

(i) α.σ.κ.

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(h(X)\le y) = \begin{cases} \sum\limits_{\{x:\, h(x)\le y\}} P(X=x), & \text{για } X \text{ διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{\{x:\, h(x)\le y\}} f_X(x)dx, & \text{για } X \text{ συνεχή τ.μ.} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Άσκηση 2.4):
$X \sim N(0,1)$ και $Y=X^2$, $Y\sim$;

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^2\le y) = P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}) = 2P(0\le X\le\sqrt{y}) \equiv$$
$$\equiv G\left(\alpha=\frac{1}{2}=\frac{v}{2}, \beta=2\right) \equiv \chi_1$$

(ii) σ.π. ή σ.π.π.

<u>Διακριτή τ.μ. X και $Y=h(X)$</u>

$$P_Y(y) = P(Y=y) = P(h(X)=y) = \sum_{\{x:\, h(x)=y\}} P(X=x).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

X	0	1	2	3	4	5
$P_X(x)$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
$Y=(X-2)^2$	4	1	0	1	4	9
$P_Y(y)$			p_2	p_1+p_3	p_0+p_4	p_5

$\sum_{1}^{5} p_i = 1$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ = p_2 & , 0 \le y < 1 \\ = p_2 + p_1 + p_3 & , 1 \le y < 4 \\ = p_2+p_1+p_3+p_0+p_4 & , 4 \le y < 9 \\ = 1 & , y \geq 9 \end{cases}$$

παράδειγμα για (i) και διακριτή τ.μ. X

Συνεχή τ.μ. X και $Y=h(X)$ αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός – **Θεώρημα**.
Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$. Θέτουμε $S=\{x: f_X(x)>0\}$ και υποθέτουμε ότι:
1) Η συνάρτηση $Y=h(x)$ είναι ένας αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός που απεικονίζει το S σε ένα σύνολο T τότε y: $T=\{y: y=h(x), x\in S\}$.
2) Η αντίστροφη συνάρτηση $x=h^{-1}(y)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι συνεχής και μη μηδενική $\forall y \in T$.
Τότε η $Y=h(X)$ είναι συνεχής τ.μ. με σ.π.π.:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| , \ y\in T. \quad \| \quad f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω S διάστημα, $y=h(x)$ γνήσια αύξουσα στο S δηλ. $h'(x)>0$ που σημαίνει $dh^{-1}(y)/dy>0$ στο T.
Για $y\in T$, $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(h(X)\le y) = P[X \le h^{-1}(y)] = F_X(h^{-1}(y))$.

Άρα, $f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$X \sim Be(a,\beta)$ και $Y = -\ln X$, $Y = ;$

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \quad , 0<x<1.$$

$S = \{x : f_X(x) > 0\} = (0,1)$

$T = \{y : y = -\ln x , x \in (0,1)\} = (0, \infty)$

$$y = -\ln x \Rightarrow -y = \ln x \Rightarrow x = e^{-y} (= h^{-1}(y)) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -e^{-y}$$

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \left| \frac{de^{-y}}{dy} \right| = \frac{1}{B(a,\beta)} (e^{-y})^{a-1} (1-e^{-y})^{\beta-1} e^{-y} \quad , y>0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κομματιαστά αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός):
Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$ και $y = h(x)$ μετασχηματισμός.
Θέτουμε $S = \{x : f_X(x) > 0\}$ και $T = \{y : y = h(x), x \in S\}$.
Υποθέτουμε ότι: ① Υπάρχει μια διαμέριση $S_1, \dots, S_k$ του S (τα S_i να είναι ξένα μεταξύ τους για $i = 1, \dots, k$) τέτοια ώστε η $h(x)$ να είναι αμφιμονοσήμαντη του S_i στο T και έστω $y = h_i(x)$ ο περιορισμός της $h(x)$ στο S_i.
$T_i = \{y : y = h_i(x), x \in S_i\}$, $i = 1, \dots, k$ με $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = T$, αλλά τα T_i δεν είναι κατ' ανάγκη ξένα μεταξύ τους.
② Για κάθε i, η $x = h^{-1}(y)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της συνεχής και μη μηδενική $\forall y \in T_i$. Τότε η $Y = h(X)$ είναι συνεχής τ.μ. με σ.π.π.:

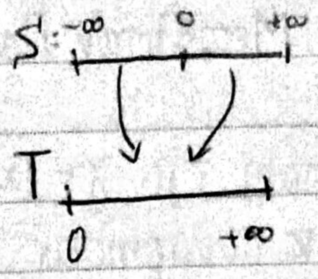
$$f_Y(y) = \sum_i f_X[h_i^{-1}(y)] \left| \frac{d h_i^{-1}(y)}{dy} \right| \quad , y \in T$$

όπου το άθροισμα είναι για εκείνα τα i τα οποία $h_i(x) = y$ (για τα κοινά y).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $X \sim f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, $Y = X^2$, $Y \sim ;$

$S = \{x : f_X(x) > 0\} = (-\infty, +\infty)$, και $T = \{y : y = x^2, x \in S\} = (0, +\infty)$

$y = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$



$S_1 = (-\infty, 0) \xrightarrow{x=-\sqrt{y}} T_1 = (0, +\infty)$

$S_2 = (0, +\infty) \xrightarrow{x=\sqrt{y}} T_2 = (0, +\infty)$

$$\frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}} \rightarrow \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

(S_1, T_1): $f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $y > 0$.

(S_2, T_2): $f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $y > 0$.

Τελικά: $f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} e$, $y > 0$.

(iii) Ροπογεννήτριες

Τ.μ. X και $Y = h(X)$ μετασχηματισμός.

$$m_Y(t) = E\left(e^{h(x)t}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{h(x)t} P_X(x), & X \text{ διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x)t} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$, $Y \sim ;$

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-2t}} =$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Θέτω: $x\sqrt{1-2t} = y \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{1-2t}}$

$$= (1-2t)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1.$$

Αλλαγή Μεταβλητών Πολυδιάστατη Περίπτωση

n-διάστατη τ.μ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ με από κοινού κατανομή ($p_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$ ή $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$)
και οι k συναρτήσεις: $Y_1 = h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, Y_k = h_k(X_1, \dots, X_n)$
$(Y_1, \dots, Y_k) \sim ;$
$F_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{y}) = P(Y_1 \le y_1, \dots, Y_k \le y_k) = P(h_1(\underset{\sim}{X}) \le y_1, \dots, h_k(\underset{\sim}{X}) \le y_k)$

(i) α.σ.κ.
(ii) μετασχηματισμού
(iii) ροπογεννήτριας

(i) α.σ.κ. – διδιάστατη περίπτωση
Έστω $Y = h(X_1, X_2)$, τ.μ. (X_1, X_2) έχει γνωστή κατανομή

$$F_Y(y) = P(h(X_1, X_2) \le y) = \begin{cases} \displaystyle\sum\sum_{\{(x_1,x_2):\, h(x_1,x_2) \le y\}} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\ \displaystyle\iint_{\{(x_1,x_2):\, h(x_1,x_2) \le y\}} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 \end{cases}$$

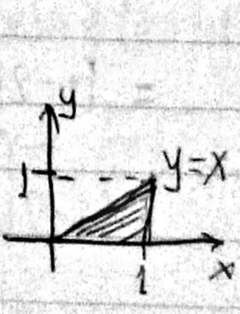
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: $(X, Y) \sim f_{X,Y}(x,y) = x + y \quad , 0 < x, y < 1.$
Έστω $Z = \max(X, Y) \quad , Z \sim ; \quad , 0 < z < 1.$

$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\max(X,Y) \le z) = P(X \le z, Y \le z) =$
$= P(0 < X \le z, 0 < Y \le z) = \int_0^z \int_0^z (x+y)\,dy\,dx = z^3 \quad , 0 < z < 1.$

$f_Z(z) = 3z^2 \quad , 0 < z < 1$

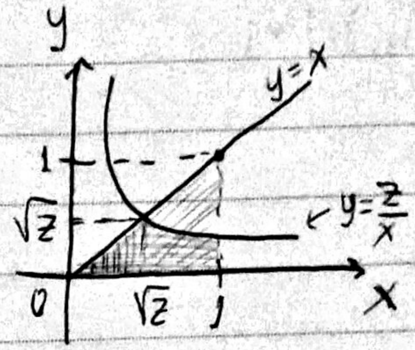
$\equiv Be(a = 3, b = 1)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: $(X, Y) \sim f_{X,Y}(x,y) = 3x \quad , 0 < y < x < 1$
$Z = XY \quad , Z \sim ;$
$U = \dfrac{X}{Y} \quad , U \sim ;$



$Z = XY \quad , 0<z<1$

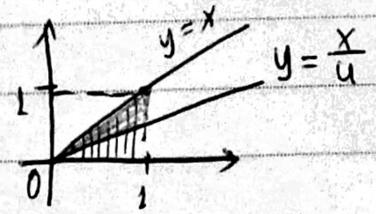
$$F_Z(z) = \iint 3x\,dy\,dz = P(Z\le z) = P(XY\le z) = \iint_{\{xy\le z\}} 3x\,dy\,dz. =$$



$$= \iint_{\{y\le \frac{z}{x}\}} 3x\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{x} 3x\,dy\,dx + \int_{\sqrt{z}}^{1}\int_0^{\frac{z}{x}} 3x\,dy\,dx$$

$$= 3z - 2z^{3/2} \Rightarrow \boxed{f_Z(z) = 3(1-\sqrt{z}) \ , 0<z<1}$$

$U = \frac{X}{Y} \quad , 0<y<x<1 \quad , u\geq 1.$



$$F_U(u) = P\left(\frac{X}{Y}\le u\right) = \iint_{\{y\geq \frac{x}{u}\}} 3x\,dy\,dx = \int_0^1\int_{\frac{x}{u}}^{x} 3x\,dy\,dx = 1 - \int_0^1\int_0^{\frac{x}{u}} 3x\,dy\,dx = 1 - \frac{1}{u} \ , u>1$$

και $f_U(u) = \frac{1}{u^2} \ , u>1.$

(ii) Μετασχηματισμού (για διακριτό τ.δ.)

$\underset{\sim}{X} \sim P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$: n-διάστατο τ.δ.

$Y_1 = h_1(\underset{\sim}{X}), \dots, Y_k = h_k(\underset{\sim}{X})$

$$P_{Y_1,\dots,Y_k}(y_1,\dots,y_k) = P(Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k) = \sum_{\{h_1(\underset{\sim}{x}) = y_1, \dots, h_k(\underset{\sim}{x}) = y_k\}} P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(x_1, x_2, x_3):	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$P_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$